بر اساس دفترچه F — صبح جمعه ۹۷/۲/۷

ت ۳۱

④

جملات عبارت مورد نظر تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q = iz$ داده اند.

پس بر اساس مجموع n جمله از تصاعد هندسی، ابتدا عبارت را ساده می کنیم.

فرمول: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

$$1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + iz^5 = 0 \Rightarrow \frac{(1)(1-(iz)^6)}{1-iz} = \frac{1-i^6z^6}{1-iz} \overset{i^2=-1}{=\!=} \frac{1+z^6}{1-iz}$$

صورت $= 0$

$$\Rightarrow 1 + z^6 = 0 \Rightarrow \boxed{z^6 = -1} \overset{\sqrt[6]{}}{\Rightarrow} z = \sqrt[6]{-1}$$

جواب سوال

بحث بیشتر

حال کافی است (۱-) را در فرم قطبی نوشته و از آن ریشه ششم بگیریم.

$$z = \sqrt[6]{(1)e^{i\pi}} = \sqrt[6]{1}\, e^{\frac{i\pi + 2k\pi}{6}} \quad k = 0, 1, \dots, 5 \longrightarrow$$ تمام جوابها

توجه شود چون در عبارت $\frac{1+z^5}{1-iz}$، مقدار $z = -i$ ریشه مخرج است، باید از جوابهای صورت کنار گذاشته شود.

$$k = 4 \longrightarrow \theta = \frac{i\pi + 8\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} i \Rightarrow z = -i$$

با جواب سوال تناقض ندارد.

ت ۳۲

①

با توجه به اینکه حجم حاصل از دوران حول محور xها سوال شده است، از روش دیسک داریم:

روش دیسک

$$\longrightarrow V_{ox} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left((\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x\right) dx$$

$$\Rightarrow V_{ox} = \pi \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + 2\sin x \cos x)\,dx = \pi\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{\pi^2}{4} + \pi$$

(تیپه بتا) یا (توان شکن) — (تبدیل به $\sin^2 x$) یا $(u = \sin x)$

ت ۳۳

③

حدود حاصل جمع در بی‌نهایت را با کمک قضیه حد مجموع ریمان با استفاده از انتگرال می‌سنجیم.

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}}{\sum_{i=1}^{n}3^{\frac{i}{n}}}\times\frac{1/n}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3^{i/n}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\int_0^1 2^x\,dx}{\int_0^1 3^x\,dx}=\frac{\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1}{\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1}=\frac{\frac{2-1}{\ln 2}}{\frac{3-1}{\ln 3}}=\frac{\ln 3}{2\ln 2}=\frac{\ln 3}{\ln 4}$$

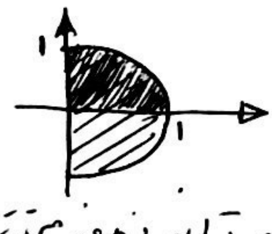
ت ۳۴

④

با توجه به ظاهر شدن (x^2+y^2) در انتگرال سه‌گانه از تبدیل مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. ($x^2+y^2\leq z\leq 8-x^2-y^2$ پس $r^2\leq z\leq 8-r^2$ است)

D: تصویر ناحیه روی xoy

$$\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2} & \Rightarrow\quad y^2+x^2=1\\ 0\leq x\leq 1\end{cases}$$



می‌توانیم از مفهوم تقارن استفاده کنیم و دو برابر $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ برای $0\leq r\leq 1$ را بدست آوریم.

$$I=2\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^{8-r^2}r^3\,r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4(8-r^2-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow I=2\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)}_{\pi/2}\underbrace{\left(\int_0^1(8r^4-2r^6)\,dr\right)}_{8\frac{r^5}{5}-\frac{2r^7}{7}\Big|_0^1}=\pi\left(\frac{46}{35}\right)$$

ت ۳۵

(۱)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}(2x+1)^n} \overset{\text{باید}}{<} 1 \Rightarrow |2x+1|<1 \Rightarrow -1<x<0$$

(بررسی سری همگرایی بر اساس آزمون ریشه)

جهت بررسی همگرایی سری در $x_0=0$ و $x_0=-1$ (که از ابتدا براساس آزمون ریشه هم مشخص بود که نمی‌توانیم چنین کاری را بکنیم)، این مقادیر را در سری جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} S(0) = \sum \frac{1}{n} \xrightarrow[p=1]{\text{سری p}} \text{سری واگرا} \\ S(-1) = \sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[\text{بر اساس آزمون لایب‌نیتز}]{\text{سری متناوب}} \text{سری همگرا} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ بازه همگرایی $[-1,0)$

ت ۳۶

(۴)

سوال بسیار ساده‌ای است. کافی است از تابع ابتدا نسبت به y مشتق و از مقدار بدست آمده نسبت به x مشتق بگیریم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(\frac{-x^2}{y^2}+\frac{2y}{x}\right)}{\partial x} = \left.\dfrac{-2x}{y^2} - \dfrac{2y}{x^2}\right|_{(1,1)} = -2-2=-4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x} \end{cases}$$

ت ۳۷

(۲)

جهت تعیین انحنا منحنی‌های پارامتری دومولفه‌ای از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{\pi}\cos \pi\frac{t^2}{2} \\ y' = 2\sqrt{\pi}\sin\frac{\pi t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -2\pi\sqrt{\pi}\, t \sin\frac{\pi t^2}{2} \\ y'' = 2\pi\sqrt{\pi}\, t\cos\frac{\pi t^2}{2} \end{cases}$$

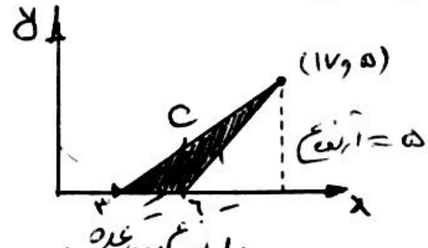
$$K(t) = \frac{\left|4\pi^2 t\cos^2\frac{\pi t^2}{2} + 4\pi^2 t\sin^2\frac{\pi t^2}{2}\right|}{\left(4\pi\cos^2\frac{\pi t^2}{2} + 4\pi\sin^2\frac{\pi t^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{4\pi^2|t|}{4\pi\sqrt{4\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}|t|$$

$$\xrightarrow{t=1} k(t=1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ت ۳۸
(۱)

انتگرال خواسته شده یک انتگرال خط نوع دوم است که چون در ناحیه بسته است، از روش قضیه گرین برای حل آن استفاده می کنیم.

$$I = \oint_C p\,dx + q\,dy \overset{\text{گرین}}{=\!=} \iint_{\text{داخل } C} (q_x - p_y)\,dA$$



$$\Rightarrow I = \iint_D (19-7)\,dA = 12\iint_D dA = 12 S_D = 12\left(\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}\right) = 12 \times \frac{5\times 3}{2} = 90$$

ت ۳۹
(۳)

مبحث بهینه سازی ریاضی ۱ است. هدف ماکزیمم سازی مساحت مستطیل است.

قید کمکی محیط مستطیل است!

هدف: $\mathrm{Max}(S_{\square}) = xy$

قید کمکی: $P = 2(x+y) = 80 \Rightarrow y = 40 - x$

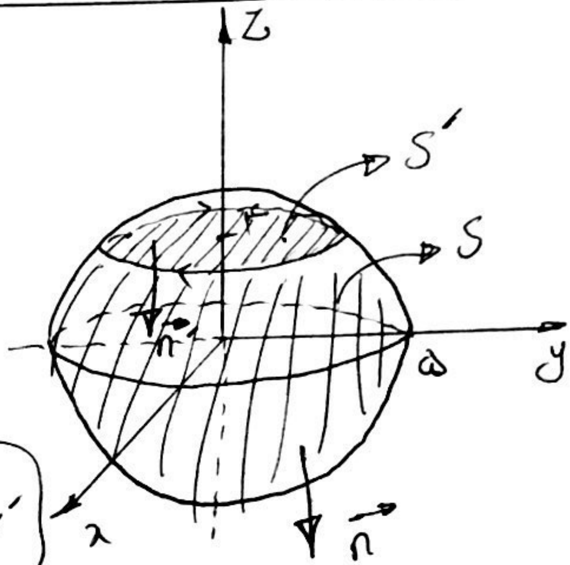
هدف اصلاح شده

$$\xrightarrow{\text{قید در هدف}} S(x) = x(40 - x) = 40x - x^2 \xrightarrow[S'_x = 0]{\text{ماکزیمم سازی؟}} 40 - 2x = 0 \Rightarrow x = y = 20$$

$$\Rightarrow S_{Max} = (20)(20) = 400$$

ت ۴۰
(۲)

چون سوال $\iint_S \mathrm{curl}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را خواسته است براساس صورت دوم قضیه استوکس حتماً S' وجود دارد که با S در یک مرز مشترک هستند و محاسبات روی S' به مراتب ساده تر است. برای این منظور شکل ناحیه را رسم می کنیم.



روی S' : $dS' = dA$ و $\vec{n}' = -\vec{k}$ است.

تلاقی S و S' : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=9$

طبق استوکس در صورت دوم: $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S'} \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}'\,dS'$

$$I = \iint_{S'} \left(\text{مهم نیست},\ \text{مهم نیست},\ q_x - p_y\right)\cdot(0,0,-1)\,dA$$

مولفه سوم curl ([illegible])

$$\Rightarrow I = \iint_{x^2+y^2\le 9} \overbrace{(p_y - q_x)}^{1-(-1)}\,dA = 2S_D = 2(9\pi) = 18\pi$$