پاسخنامه تشریحی ریاضی عمومی ۱و۲ — مهندسی کامپیوتر ۹۷

تذکر: کنکور کارشناسی ارشد ۹۷ اولین دوره‌ای بود که درس ریاضی ۱و۲ در رشته مهندسی کامپیوتر سوال شد.

⊛ پاسخنامه زیر بر اساس دفترچه E آزمون صبح جمعه ۱۳۹۷/۲/۷ رشته مذکور نوشته شده است.

ت ۲۱
(۳)

- ابتدا با توجه به رابطه $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ عبارت را بازنویسی کنیم:

$$\frac{|6z-i|}{|2+3iz|} \leq 1 \Rightarrow |6z-i| \leq |2+3iz| \xrightarrow{\wedge 2} |6z-i|^2 \leq |2+3iz|^2$$

توجه شود که یکی از روش‌های رسیدن به جواب، نامعادلات به توان رساندن آنهاست. همچنین با توجه به رابطه $z\bar{z} = |z|^2$، خواهیم داشت:

$$(6z-i)(\overline{6z-i}) \leq (2+3iz)(\overline{2+3iz}) \Rightarrow (6z-i)(6\bar{z}+i) \leq (2+3iz)(2-3i\bar{z})$$

$$\Rightarrow 36\overset{|z|^2}{(z\bar{z})} + \cancel{6iz} - \cancel{6i\bar{z}} - i^2 \leq 4 - \cancel{6i\bar{z}} + \cancel{6iz} - 9i^2 \overset{|z|^2}{(z\bar{z})}$$

$$\Rightarrow 27|z|^2 \leq 3 \Rightarrow |z|^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow |z| \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{Max}(|z|) = \frac{1}{3}$$

ت ۳۲
(۱)

با توجه به مرتب بودن x بر حسب y می‌توان فرض کرد دوران حول محور yها در حالت استاندارد است. پس باید از روش پوسته استوانه با تغییرات y استفاده کنیم.

$$x = f(y) \xrightarrow[\text{حول محور } x \text{ ها}]{\text{دوران فرضی}} \equiv y = f(x) \xrightarrow[\text{حول محور } y \text{ ها}]{\text{دوران فرضی}} \Rightarrow \text{روش پوسته استوانه}: V_{ox} = 2\pi \int_{y=a}^{b} |x_2 - x_1||y|\,dy$$

$$\xrightarrow[\substack{x_1 = \sin y \\ x_2 = e^y + \sin y}]{y \in [0, \pi/2]} V_{ox} = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^y y\,dy = 2\pi (y-1)e^y \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi\left[(\tfrac{\pi}{2}-1)e^{\pi/2} + 1\right] = \pi e^{\pi/2}(\pi-2) + 2\pi$$

Scanned with CamScanner

پاسخنامه تشریحی ریاضی ۱ و ۲ — مهندسی ۵ تیر ۹۷

ت ۳۵
(۲)

بردار هادی خط مماس بر "خم فصل مشترک دو رویه" از حاصلضرب خارجی دو گرادیان رویه‌ها بدست می‌آید. هر بردار موازی بردار مذکور نیز نقش هادی خط را دارد.

$\vec\nabla f_1 = ?$ $\longrightarrow f_1: 4x^2+4y^2-z=0 \Rightarrow \vec\nabla f_1=(8x, 8y, -1) \Rightarrow \vec\nabla f_1(0,1,4)=(0,8,-1)$

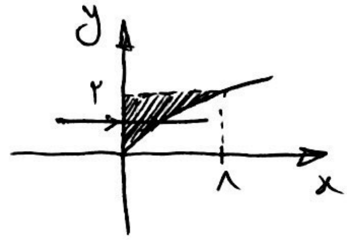
$\vec\nabla f_2 = ?$ $\longrightarrow f_2: 4-4x^2-z=0 \Rightarrow \vec\nabla f_2=(-8x, 0, -1) \Rightarrow \vec\nabla f_2(0,1,4)=(0,0,-1)$

$\Rightarrow \vec v = \vec\nabla f_1 \times \vec\nabla f_2 = \begin{vmatrix}0\\8\\-1\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}0\\0\\-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-8\\0\\0\end{vmatrix} \Rightarrow$ هادی خط موازی با $\vec i$ است.

ت ۳۶
(۴)

با توجه به اینکه تابع تحت انتگرال نسبت به المان داخلی سخت است، از روش تعویض ترتیب المان انتگرالگیری استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}\le y\le 2\\ 0\le x\le 8\end{cases} \xrightarrow{\text{روی مرز صفحه}} y=\sqrt[3]{x} \;\text{یا}\; x=y^3$$



تعیین مرزهای جدید: $I=\int_0^2\int_0^{y^3}(e^{y^4}+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2 (y^3e^{y^4}+y^5)\,dy$

$$=\frac{1}{4}e^{y^4}+\frac{y^6}{6}\Big|_0^2=\frac{e^{16}-1}{4}+\frac{64}{6}=\frac{1}{12}(3e^{16}+125)$$

ت ۳۷
(۱)

می‌توانیم انتگرال را به فرم حاصلجمع دو عبارت زیر بنویسیم:

$$I=\underbrace{\oint_C \frac{2e^x}{3(e^x+x^2)}dx-\frac{2e^y}{3(y^2+e^y)}dy}_{Q_x=P_y=0}+\underbrace{\frac{2}{3}\oint\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}}_{G\;(\text{شامل مبدأ})\;\text{کل تابع}}$$

پاسخنامه تشریحی ریاضی ۱ و ۲ — مهندسی کامپیوتر ۹۷

در انتگرال اول چون میدان پایستار و مرز ناحیه بسته است حاصل صفر است. در انتگرال دوم نیز بنا به کار میدان G اگر ناحیه شامل مبدا نباشد (که نیست ؛ $(0+2)^4+(0-2)^4 \geq 1$) برابر صفر است.

ت ۳۸ — (۳)

با کمک قضیه دیورژانس می‌توانیم انتگرال سطح نوع اول را روی یک سطح بسته محاسبه کنیم. برای این منظور باید فرض کنیم تابع تحت انتگرال $f(x,y,z)=\vec{F}\cdot\vec{n}$ است.

$f(x,y,z)$ را که داریم (تحت انتگرال است)، $\vec{n}$ را هم که از روی $\vec{n}=\pm\dfrac{\vec{\nabla} g}{\|\vec{\nabla} g\|}$ بدست می‌آوریم که

برای یک کره به شعاع ۱، $\vec{n}$ برابر (x,y,z) است. پس $\vec{F}$ تعیین می‌شود.

$$\vec{F}\cdot(x,y,z)=\big((2x+3z)x+\big(-(xz+y)y\big)+(y^2+2z)z\big)\Rightarrow$$

$$\vec{F}=(2x+3z,\ -xz-y,\ y^2+2z)$$

$$\underset{\text{روی سطح کره}}{\oiint}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds\ \underset{\text{دیورژانس}}{\overset{\text{قضیه}}{=\!=}}\ \underset{\text{داخل کره}}{\iiint}\mathrm{Div}(F)\,dv=\underset{\text{داخل کره}}{\iiint}(2-1+2)\,dv=3(\overbrace{\text{حجم}}^{\frac{4}{3}\pi(1)^3}\text{ناحیه})=4\pi$$

ت ۳۳ — ④

گزینه پیشنهادی شود ویدیویی که در کانال و سایت بارگذاری شده و این تست در آن تدریس شده است را مشاهده نمایید:

نکته مهم ۱: $\int_a^{\infty} \cos^p x\,dx \xrightarrow{a>0}$ برای $p\in$ همگرا است.

$I = \int_1^{\infty} \cos x\, dx \xrightarrow{p=1}$ واگرا

$J = \int_1^{\infty} \cos t^2\, dt \xrightarrow[dt=\frac{1}{2}x^{-1/2}dt]{t^2=x \Rightarrow t=\sqrt{x}} J = \int_1^{\infty} (\cos x)\, \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx$

$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx \xrightarrow{p=1/2>0}$ همگرا

نکته مهم ۲:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx \Rightarrow \begin{cases} p>1 & \text{همگرای مطلق} \\ 0<p\leq 1 & \text{همگرای شرطی} \\ p\leq 0 & \text{واگرا} \end{cases}$$

ت ۳۴ — ④

مشخص است برای بررسی گزینه‌ها تنها روی $x_0=1$ و $x_0=3$ باید کار کنیم.

$x_0=1 \Rightarrow S=\sum \frac{(-1)^n}{n\ln n} \xrightarrow[\text{(سری متناوب)}]{\text{سری لایب‌نیتز}}$ همگرا

$x_0=3 \Rightarrow S=\sum \frac{1}{n\ln n} \xrightarrow[\beta=1]{p=1}$ (مقایسه با خانواده p-سری) واگرا

پس بازه همگرایی $[1,3)$ است.